Paskaita 2

I. Funkcionalo variacija ir jos paprasčiausios savybės.

Apibrėžimas 2. Funkcionalo $v[y(x)]$ argumento *y(x)* variacija δy vadiname dviejų funkcijų skirtumą t.y.

$$\delta y = y(x) - y_1(x),$$

kur *y(x)* ir $y_1(x)$, tam tikroje funkcijų klasėje kinta laisvai. Atkreipsime dėmesį į vieną argumento *y(x)* variacijos savybę. Jei *y(x)* ir $y_1(x)$ yra diferencijuojamos funkcijos (kartą arba daugiau), tai

$$(\delta y)' = [y(x) - y_1(x)]' = \delta(y'(x) - y_1'(x)) = \delta y'.$$

Apibrėžimas 3. Kreivės *y(x)* ir $y_1(x)$ vadinamos nulinės eilės artumo kreivėmis, jei variacijos modulis $|\delta y|$ mažas. Kreivės *y(x)* ir $y_1(x)$ vadinamos pirmos eilės artumo kreivėmis, jei moduliai $|\delta y|$, $|\delta y'|$ maži. Kreivės yra *k* eilės artumo, kai moduliai $|\delta y|$, $|\delta y'|$, ...,$\left|\delta y^{(k)}\right|$ maži.

Apibrėžimas 4. Funkcionalas $v[y(x)]$ vadinamas *tolydžiuoju k-sios* eilės artumo prasme, jei bet kuriam $\varepsilon > 0$ egzistuoja $h > 0$ toks, kad iš nelygybių

$$|\delta y| < h, \ldots, \left|\delta y^{(k)}\right| < h,$$

išplaukia nelygybė

$$|v[y(x)] - v[y_1(x)]| < \varepsilon.$$

Apibrėžimas 5. Funkcionalas $L[y(x)]$ vadinamas tiesiniu, jei galioja lygybė

$$L[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = c_1 L[y_1(x)] + c_2 L[y_2(x)],$$

kur c_1, c_2 bet kokie skaičiai.

Funkcionalai

$$L[y(x)] = y'(x_0),\; L[y(x)] = \int_a^b y(x)dx$$

yra tolydūs.

Apibrėžimas 6. Funkcionalo $v[y(x)]$ pokyčiu vadiname skirtumą

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)].$$

Apibrėžimas 7. Jei funkcionalo v pokytį Δv galime užrašyti lygybe

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\max|\delta y|,$$

kur $L[y(x), \delta y]$ yra tiesinis δy atžvilgiu funkcionalas, $\max|\delta y|$ - maksimali $|\delta y|$ reikšmė ir $\beta(y(x), \delta y) \to 0$, kai $\max|\delta y| \to 0$, tai tiesinė δy atžvilgiu funkcionalo pokyčio dalis $L[y(x), \delta y]$ vadinama funkcionalo v variacija ir žymima δv.

Iš ankstesnių samprotavimų išplaukia tai, kad funkcionalo variacija – pagrindinė tiesinė δy atžvilgiu funkcionalo dalis, t.y. $\delta v = L[y(x), \delta y]$. Funkcionalo variaciją kartais vadiname funkcionalo diferencialu, o patį funkcionalą – diferencijuojamu.

Teorema 1. *Jei* $y(x,a) = y(x) + \alpha\delta y$ – *vieno parametro leistinų funkcijų šeima, kur* α – *parametras, o* $\varphi(\alpha) = v[y(x) + \alpha\delta y]$, *tai teisinga lygybė*

$$\varphi'(0) = \frac{\partial}{\partial\alpha} v[y(x) + \alpha\delta y]|_{\alpha=0}.$$

Kitaip tariant, funkcionalo $v[y(x)]$ *variacija yra funkcionalo* $v[y(x) + \alpha\delta y]$ *išvestinė* α *atžvilgiu, kai* $\alpha = 0$, *t.y.* $\varphi'(0) = \delta y$.

Į r o d y m a s. Tegul funkcionalas turi variaciją pagrindinės tiesinės pokyčio dalies prasme. Tą pokytį užrašysime lygybe

$$\Delta v = v[y(x) + \alpha\delta y] - v[y(x)] = L(y, \alpha\delta y) + \beta(y, \alpha\delta y)|\alpha| \max|\delta y|.$$

Išvestinė $v[y + \alpha\delta y]$ α atžvilgiu, kai $\alpha = 0$ yra pavidalo

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{L[y, \alpha\delta y] + \beta[y(x), \alpha\delta y]|\alpha| \max|\delta y|}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y, \alpha\delta y)}{\alpha} + \lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x), \alpha\delta y]|\alpha| \max|\delta y|}{\alpha} = L(y, \delta y).$$

Iš funkcionalo L tiesiškumo išplaukia

$$L[y, \alpha\delta y] = \alpha L[y, \delta y]$$

Be to, pagal sąlygą $\beta(y(x), \alpha\delta y) \to 0$, kai $\alpha \to 0$. Todėl

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x), \alpha\delta y]|\alpha| \max|\delta y|}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{|\alpha|}{\alpha}\beta[y(x), \alpha\delta y]\max|\delta y| = 0.$$

Vadinasi

$$\lim_{\Delta\alpha\to}\frac{\Delta v}{\Delta\alpha} = L[y, \delta y],$$

ir teorema įrodyta.

Apibrėžimas 8. Funkcionalas $v[y(x)]$ kreivėje $y_0(x)$ įgyja maksimumą, jei bet kurioje kreivėje artimoje $y_0(x)$, jo reikšmė nedidesnė už $v[y_0(x)]$, t.y.

$$\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \le 0.$$

Jei $\Delta v \le 0$ ir $\Delta v = 0$ tik, kai $y=y_0(x)$ sakome, kad kreivėje $y_0(x)$ funkcionalas įgyja griežtą maksimumą. Šiuo atveju kreivei $y_1(x)$ visoms artimoms kreivėms $y_1(x)$.

Funkcionalas $v[y(x)]$ įgyja kreivėje $y_1(x)$ minimumą, jei bet kurioje $y_1(x)$ artimoje kreivėje jo reikšmė nemažesnė, kaip $v[y_1(x)]$, t.y.

$$\Delta v = v[y(x)] - v[y_1(x)] \ge 0.$$

Jei $\Delta v \ge 0$ ir $\Delta v = 0$ tik, kai $y = y_1(x)$ sakome, kad kreivėje $y_1(x)$ funkcionalas įgyja griežtą minimumą.

II. Pagrindinė variacinio skaičiavimo teorema.

Teorema 2. *Jei funkcionalas* $v[y(x)]$ *įgyja ekstremumą kai* $y = y_0(x)$, *tai* $\delta v = 0$.

Į r o d y m a s. Fiksuotiems $y_0(x)$ ir δy funkcionalas $v[y_0(x) + \alpha\delta y]$ yra α funkcija, t.y.

$$\varphi(\alpha) = v[y_0(x) + \alpha\delta y].$$

Pagal teoremą 1 turime

$$\varphi'(0) = \delta v = \frac{\partial}{\partial\alpha}[y_0(x) + \alpha\delta y]_{\alpha=0}.$$

Tai, kad funkcionalas $v[y(x)]$ pagal sąlygą įgyja ekstremumą kai $y_0(x)$, tai funkcija $\varphi(\alpha)$ įgyja ekstremumą kai $\alpha = 0$.

Vadinasi, $\varphi'(0) = 0$. Tada $\delta v = 0$. Teorema įrodyta.

III. Pagrindinė variacinio skaičiavimo lema.

Lema 1. *Jei funkcija* $\Phi(x)$ *tolydi atkarpoje* $[x_0, x_1]$ *ir*

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\tau(x)dx = 0,$$

kur $\tau(x)$ *– bet kuri diferencijuojama (kartą ar daugiau) funkcija*, $\tau(x_0) = 0$, $\tau(x_1) = 0$ *ir* $|\tau(x)| < \varepsilon$, *tai* $\Phi(x) \equiv 0$ *atkarpoje* $[x_0, x_1]$.

Į r o d y m a s. Tarkime, kad atkarpos $[x_0, x_1]$ taške $x = x^*$ $\Phi(x^*) \neq 0$. Tada iš funkcijos $\Phi(x)$ tolydumo išplaukia, kad ji to taško aplinkoje (x_0^*, x_1^*) išlaiko tą patį ženklą. Tada, pasirinkę funkciją $\tau(x)$ išlaikančią tą patį ženklą toje pačioje aplinkoje ir lygią nuliui už jos, gauname

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\tau(x)dx = \int_{x_0^*}^{x_1^*} \Phi(x)\tau(x)dx \neq 0$$

(nes sandauga $\Phi(x)\tau(x)$ išlaiko ženklą intervale (x_0^*, x_1^*) ir lygi nuliui už jo). Gavome prieštaravimą, kuris įrodo lemą.